Математический анализ, ИУ9, 1-й семестр
Вопросы для подготовки к коллоквиуму "Введение в анализ"

1. Дать определения множества, его элементов, пустого и универсального множества. Опишите основные способы задания множеств. *(2 балла)*
2. Дать определение равенства множеств и определение подмножества. Сформулировать метод двух включений для доказательства теоретико-множественных равенств. *(2 балла)*
3. Дать определение основных операций над множествами. Сформулировать некоторые их свойства. *(2 балла)*
4. Дать определения отображения (функции), образа и прообраза подмножеств. *(2 балла)*
5. Дать определение инъекции, сюръекции и биекции. *(2 балла)*
6. Дать определение композиции и обратного отображения. *(2 балла)*
7. Доказать, что композиция биекций есть биекция. *(2 балла)*
8. Доказать, что биекция и только она имеет обратное отображение. *(4 балла)*
9. Дать определение логического высказывания. Сформулировать основные операции над высказываниями. *(2 балла)*
10. Сформулировать правило построения отрицания сложных логических высказываний, содержащих кванторы. Используя это правило, дать определение неограниченного числового множества. *(2 балла)*
11. Дать определение математической теоремы как логического высказывания. Сформулировать прямое доказательство теоремы и доказательство от противного. *(2 балла)*
12. Сформулировать принцип математической индукции. Используя его, доказать неравенство Бернулли. *(4 балла)*
13. Доказать формулу бинома Ньютона. *(4 балла)*
14. Сформулировать свойство полноты вещественных чисел. *(2 балла)*
15. Дать определение точной верхней и нижней грани числового множества. *(2 балла)*
16. Доказать теорему о точной грани. *(4 балла)*
17. Дать геометрическую интерпретацию вещественных чисел. *(2 балла)*
18. Доказать теорему о вложенных отрезках. *(4 балла)*
19. Дать определение мощности множества и счетного множества. Привести примеры. *(2 балла)*
20. Доказать теорему о мощности конечных множеств. *(4 балла)*
21. Доказать, что любое подмножество счетного множества конечно или счетно. *(4 балла)*
22. Доказать, что объединение конечного или счетного семейства счетных множеств счетное. *(4 балла)*
23. Доказать, что множество рациональных чисел счетное. *(4 балла)*
24. Дать определение мощности континуум. Привести примеры. *(2 балла)*
25. Доказать, что множество действительных чисел отрезка $[0, 1]$ не есть счетное множество. *(4 балла)*
26. Как сравниваются мощности множеств? Сформулировать теорему Кантора — Бернштейна. *(2 балла)*
27. Сформулировать теорему о сравнении мощности множества и мощности множества всех его подмножеств. Сформулировать следствие из нее. *(2 балла)*
28. Дать определения числовой последовательности и ее предела. *(2 балла)*
29. Доказать теорему о пределе постоянной последовательности. *(2 балла)*
30. Доказать теорему об ограниченности сходящейся последовательности. Привести пример использования этого факта. *(4 балла)*
31. Доказать теорему о единственности предела. *(2 балла)*
32. Дать определения монотонной и строго монотонной последовательности. *(2 балла)*
33. Доказать теорему о сходимости ограниченной монотонной последовательности. Привести пример ее применения. *(4 балла)*

34. Дать определения числа e, как предела последовательности рациональных чисел, доказав сходимость этой последовательности. *(4 балла)*
35. Дать определение частичного предела последовательности. *(2 балла)*
36. Доказать теорему Больцано - Вейерштрасса. *(4 балла)*
37. Дать определения верхнего и нижнего пределов последовательности. *(2 балла)*
38. Доказать теорему о существовании верхнего и нижнего пределов для ограниченной последовательности. *(4 балла)*
39. Доказать критерий Коши сходимости последовательности. Привести пример его применения. *(4 балла)*
40. Дать определение открытого покрытия подмножеств прямой. *(2 балла)*
41. Доказать теорему о конечном покрытии. *(4 балла)*
42. Дать определение предельной точки подмножества прямой. *(2 балла)*
43. Доказать теорему о предельной точке. *(4 балла)*
44. Дать определение компакта на прямой. *(2 балла)*
45. Дать определения внутренних и предельных точек множества. *(2 балла)*
46. Доказать теорему о внутренности открытых множеств. *(4 балла)*
47. Доказать теорему о замыкании замкнутых множеств. *(4 балла)*
48. Доказать теорему о замкнутости компакта. *(4 балла)*
49. Доказать теорему об ограниченности компакта. *(4 балла)*
50. Доказать теорему о компактности замкнутого ограниченного числового множества. *(4 балла)*